Disuguaglianza di Harnack, oscillazione e continuità Hölder delle soluzioni

1. Disuguaglianza di Harnack

Lemma 1 (Disuguaglianza di Harnack)**.** *Esiste una costante dimensionale $C_{\mathcal{H}}$ tale che*

$$\max_{B_r(x_0)} h \leq C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h\,.$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \to \mathbb{R}$ non-negativa e armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$. In particolare,

$$h(x_0) \leq C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h\,.$$

Proof. Usare la proprietà della media e la positività di h. □

Una conseguenza immediata della disuguaglianza di Harnack è il seguente teorema di Liouvile.

Teorema 2. *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e limitata dal basso,*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^d} u(x) > -\infty\ ,$$

allora u è costante.

2. Disuguaglianza di Harnack e decay dell'oscillazione

Definizione 3. *Dati un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u : A \to \mathbb{R}$, definiamo l'oscillazione di u su A come*

$$\operatorname*{osc}_A u = \operatorname*{ess\,sup}_A u - \operatorname*{ess\,inf}_A u.$$

In seguito scriveremo semplicemente inf *e* sup *al posto di* ess inf *ed* ess sup*.*

Lemma 4 (Controllo dell'oscillazione)**.** *Esiste una costante dimensionale $c \in (0, 1)$ tale che*

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_0)} h \leq (1-c) \operatorname*{osc}_{B_{2r}(x_0)} h\,,$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \to \mathbb{R}$ armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$.

Proof. Per semplicita, definiamo

$$M(r) = \sup_{B_r(x_0)} h \qquad \text{e} \qquad m(r) = \inf_{B_r(x_0)} h,$$

per ogni $r > 0$. Mostreremo che

$$M(r) - m(r) \leq (1-c)\big(M(2r) - m(2r)\big).$$

Consideriamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che

$$h(x_0) \geq \frac{M(2r) + m(2r)}{2}.$$

Consideriamo la funzione $h - m(2r)$

$$0 \leq h(x) - m(2r) \leq M(2r) - m(2r) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_{2r}(x_0).$$

Per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo

$$\frac{M(2r) + m(2r)}{2} - m(2r) \leq h(x_0) - m(2r) \leq C_{\mathcal{H}} \inf_{B_r(x_0)} \Big(h(x) - m(2r)\Big) = C_{\mathcal{H}}\Big(m(r) - m(2r)\Big)$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{M(2r) - m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} + m(2r) \leq m(r)$$

Di conseguenza,

$$M(r)-m(r)\le M(2r)-m(r)\le M(2r)-\Big(\frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}}+m(2r)\Big)\le\left(1-\frac{1}{2C_{\mathcal{H}}}\right)\Big(M(2r)-m(2r)\Big).$$

Caso 2. Supponiamo ora che

$$h(x_0)\le\frac{M(2r)+m(2r)}{2}.$$

Consideriamo la funzione $M(2r)-h$

$$0\le M(2r)-h(x)\le M(2r)-m(2r)\qquad\text{per ogni}\qquad x\in B_{2r}(x_0).$$

Per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo

$$M(2r)-\frac{M(2r)+m(2r)}{2}\le M(2r)-h(x_0)\le C_{\mathcal{H}}\inf_{B_r(x_0)}\Big(M(2r)-h(x)\Big)=C_{\mathcal{H}}\Big(M(2r)-M(r)\Big)$$

che possiamo riscrivere come

$$M(r)\le M(2r)-\frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}}.$$

Di conseguenza,

$$M(r)-m(r)\le M(r)-m(2r)\le M(2r)-\frac{M(2r)-m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}}-m(2r)\le\left(1-\frac{1}{2C_{\mathcal{H}}}\right)\big(M(2r)-m(2r)\big).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

3. Oscillazione e continuità Hölder

Lemma 5 (Oscillazione e continuità)**.** *Sia $u:B_R\to\mathbb{R}$ una funzione tale che:*

(a) $\|u\|_{L^\infty(B_R)}\le M$*;*

(b) *esiste una costante $c\in(0,1)$ tale che per ogni $x\in B_{R/2}$ ed ogni raggio $r\le\dfrac{R}{4}$ si ha*

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)}u\le(1-c)\operatorname*{osc}_{B_{2r}(x)}h\,.$$

Allora, esiste una costante $\alpha\in(0,1)$, che dipende solo da c, tale che

$$|u(x)-u(y)|\le\frac{M}{R^\alpha}C|x-y|^\alpha\qquad\textit{per ogni}\qquad x,y\in B_{R/4},$$

dove C è una costante numerica.

Proof. Definiamo

$$\varphi(x,r):=\operatorname*{osc}_{B_r(x)}u.$$

Allora:

- la funzione $r\mapsto\varphi(r,x)$ è crescente in r;
- $\varphi(x,r)\le\varphi(y,R)$, se $B_r(x)\subset B_R(y)$;
- se $0<s<t\le r$, allora

$$\Big|\fint_{B_s(x)}u-\fint_{B_t(x)}u\Big|\le\varphi(r,x).$$

Definiamo

$$r_n=R2^{-n}.$$

Allora

$$\varphi(x,r_{n+1})\le(1-c)\varphi(x,r_n),$$

e di conseguenza,

$$\varphi(x,r_n)\le(1-c)^{n-1}\varphi(x,r_1)=(1-c)^{n-1}\varphi\left(x,{}^{R}\!/_{2}\right)\le 2M(1-c)^{n-1}.$$

Supponiamo che

$$r_{n+1}\le r\le r_n.$$

Allora, scegliendo $\sigma>0$ tale che

$$2^{-\sigma}=1-c,$$

abbiamo

$$\varphi(x,r) \le \varphi(x,r_n) \le 2M(1-c)^{n-1} \le 2M\,\left(2^{-(n-1)}\right)^\sigma = \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} r_{n+1}^\sigma \le \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} r^\sigma.$$

In conclusione, per ogni $0 < r \le R/2$ ed ogni $x \in B_{R/2}$, abbiamo

$$\varphi(x,r) \le \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} r^\sigma.$$

Come conseguenza, abbiamo che:

- ogni punto $x \in B_{R/2}$ è un punto di Lebesgue e
$$u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} u\,;$$
- per ogni $x, y \in B_{R/2}$ si ha
$$|u(x) - u(y)| \le \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} |x-y|^\sigma.$$

□

Definizione 6. *Dati un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u : A \to \mathbb{R}$, definiamo la norma*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(A)} := \sup\left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \ :\ x, y \in A,\ x \ne y \right\}.$$

Proposizione 7. *Esiste una costante dimensionale $\alpha \in (0,1]$ tale che*

$$\|h\|_{C^{0,\alpha}(B_{R/2})} \le \frac{C}{R^\alpha} \|h\|_{L^\infty(B_R)},$$

Per ogni funzione armonica $h : B_R \to \mathbb{R}$, dove C è una costante numerica.

Proof. Segue dai risultati precedenti. □

Osservazione 8. *Le funzioni armoniche sono localmente limitate. Infatti, se $h : B_{2R} \to \mathbb{R}$ è armonica in B_{2R} allora per la proprietà della media*

$$h(x_0) = \fint_{B_R(x_0)} h(x)\,dx \le \fint_{B_R(x_0)} |h(x)|\,dx \le \frac{1}{|B_R|} \|u\|_{L^1(B_{2R})}\ ,$$

per ogni $x_0 \in B_R$. Di conseguenza,

$$\|u\|_{L^\infty(B_R)} \le \frac{1}{|B_R|} \|u\|_{L^1(B_{2R})}.$$